ISSN: 0798-1015

REVISTA ESPACIOS

Educación • Education • Educação • Vol. 41 (26) 2020 • Art. 25

Recibido/Received: 11/05/2020 • **Aprobado**/Approved: 03/07/2020 • **Publicado**/Published: 16/07/2020

La visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales en el estudio de las matemáticas. Una revisión bibliográfica descriptiva entre 1981 y 2016

The visualization associated with two/dimensional geometric figures in the Study of mathematics. A descriptive literature review between 1981 and 2016

MARMOLEJO, Gustavo A.[1]
PRADA, Raúl[2]
INSUASTY, Edwin[3]

Resumen
La variedad de investigaciones realizadas evidencia la importancia de la *visualización* en la investigación en educación matemática. Este artículo expone los ámbitos de investigación donde se ha centrado la atención en los últimos 35 años. A manera de conclusión se plantean cuestiones que aún no han sido contempladas.
Palabras clave: educación matemática, visualización, figuras geométricas bidimensionales.

Abstract
The variety of research carried out shows the importance of visualization in research in mathematics education. This article exposes the areas of research where attention has been focused in the last 35 years. By way of conclusion, questions are raised that have not yet been considered.
Keywords: mathematical education, visualization, two-dimensional geometric figures.

1. Introducción

La historia de las matemáticas puso en evidencia entre los siglos XIX y gran parte del siglo XX una “desvisualización” o “desespacialización” en la Geometría (Davis, 1993): la *visualización* no se consideró necesaria para el desarrollo de las matemáticas, si un obstáculo. La aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos junto al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente propició el interés de la visualización en los últimos decenios (Presmeg, 2006). Muchos investigadores de finales del siglo XX, por ejemplo, Zimmerman y Cunnighan (1991), afirmaron que se estaba viviendo una etapa de renacimiento de la *visualización*.

En la actualidad existe una fuerte tendencia a reconocer la importancia de la *visualización* en el estudio de las matemáticas (Duval, 2003;). Para muchos investigadores esta actividad cognitiva es determinarte en

[1] Profesor tiempo completo. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño. E-mai: usalgamav@udenar.edu.co
[2] Profesor tiempo completo. Facultad de Educación, Artes y Humanidades. Universidad Francisco de Paula Santander. E-mail: raulprada@ufps.edu.co
[3] Profesor tiempo completo. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño. E-mail: edwinsuasty@gmail.com

matemáticas (Zimmermann y Cunnigham, 1991; Duval, 2011). Por tanto, la comunidad educativa ha considerado su inclusión en los currículos de matemáticas (Presmeg, 2006); y ha aportado pautas para su desarrollo (Duval, 1999).

En la actualidad, a pesar de lo anterior, aún se reportan dificultades o limitaciones para que la visualziación desempeñe un papel determinante en el estudio de las matemáticas. Cuestión reportada tanto en estudiantes (Marmolejo y Vega, 2012) y educadores (Gal, 2005 en Gal y Linchevski, 2010; Marmolejo, Sánchez y Londoño, 2017) como en la forma cómo los libros de texto suscitan el estudio de las matemáticas (Marmolejo, 2020, 2014; Marmolejo, Guzmán y Insuasty, 2016).

Las investigaciones sobre el papel de la *visualización* en el estudio de las matemáticas evidencian la concepción de esta actividad cognitiva desde características y matices diferentes (Marmolejo, 2014). En el presente reporte se considera como unidad visual las figuras geométricas bidimensionales (en adelante figuras). Se asume la visualización como todo proceso matemático que contemple, de forma independiente o articulado, cualquier tipo de transformación bidimensional y unidimensional sobre una figura (aprehensión operatoria: Duval, 1999), o que suscite el pasar de asumir una figura como una Gestalt a discriminar en ella sus partes constituyentes de dimensión 1 y 0 (Deconstrucción dimensional de formas: Duval, 2004).

Teniendo en cuenta lo anterior, en el presente trabajo se asume que la visualización puede conducir asertivamente a la resolución de la tarea matemática propuesta o suscitar procedimientos engorrosos, equívocos y ajenos. En este sentido, la función desempeñada por la visualización alude al hecho que las figuras geométricas permiten la conducta de abducción (Duval, 1999), es decir, son estas representaciones quienes delimitan de entrada las alternativas a considerar en la búsqueda de una demostración. En un proceso matemático esta conducta guía la deducción (Duval, 1999).

El propósito de este artículo es doble. Por un lado, exponer, sin tomar postura, las tendencias de investigación que consideran el vínculo visualización-estudio de las matemáticas. Por otro lado, proponer un conglomerado de preguntas, aún no exploradas, que susciten el desarrollo de una nueva línea de investigación en torno comprender cómo la visualización interviene en el estudio de las matemáticas.

2. Metodología

2.1. Naturaleza de la investigación

Este trabajo centra su atención en la revisión bibliográfica de la literatura especializada. Puntualmente, considera una revisión descriptiva (Squires (1989), citado en Icart et al., 1994). Para lo cual se asumió un Análisis de contenido centrado en la investigación por observación (Pokharel & Mutha, 2009). Investigaciones de esta naturaleza permiten identificar, seleccionar y clasificar la literatura en categorías (Pokharel & Mutha, 2009). Proporcionan una puesta al día sobre conceptos útiles en áreas en constante evolución y hacen posible establecer cuáles aspectos han permanecido desconocidos (Vera, 2009). Lo cual suscita la no repetición de trabajos realizados, posibilita la consecución de marcos de referencia, el conocimiento de métodos de trabajo empleados en casos similares y la extracción de elementos para discutir los resultados de una investigación (Parra y Toro, 2006).

2.2. Fuentes de datos, muestra y selección

Cinco condiciones se consideraron para incorporar los estudios reportados en la literatura especializada en la presente investigación, a saber: investigaciones donde se aludió al termino visualización y que centraron su atención en las figuras geométricas bidimensionales (palabras claves: visualización, percepción visual, figuras, transformaciones figurales, operaciones geométricas y tratamiento figural); investigaciones reportadas en revistas internacionales y nacionales o en memorias de tesis doctorales o en congresos especializados en educación matemática (se excluyeron resúmenes); estudios publicados o finalizados en el periodo entre 1981 y 2016 (35 años); reportes expresados a través de los idiomas castellano, inglés, francés y portugués; y las fuentes del estudio debían ser de tipo primaria o secundaria.

Como fuentes de datos se seleccionó las bases de datos Scopus, Science direct y ProQuest. También, otros recursos electrónicos como Latindex, Dialnet, Redalyc y Scielo. Igualmente, los motores de búsqueda de Google y Yahoo.

El proceso anterior pemitió discriminar como unidades de análisis 49 reportes de investigación. Para lograr lo anterior se acudió de forma directa a fuentes primarias u originales. Estas permitieron identificar fuentes secundarias, las cuales fueron consideradas para llegar a las fuentes primarias.

2.3. Sistematización y discriminación de tendencias de investigación

Un vez que todos los reportes de investigación estuvieron en poder de los investigadores, se diseñó una ficha para registrar aspectos particulares que permitieran discriminar cuál fue el papel asignado a la visualización. La ficha consideró información relativa a los antecedentes presentados en la introducción, el objetivo propuesto, los resultados reportados y las conclusiones expuestas. Esta ficha fue utilizada para sistematizar y sintetizar todas las unidades de análisis. Así, surgieron cuatro categorías emergentes estas, sin ánimo de ser taxativas, se utilizaron para clasificar las unidades de análisis, a saber:

- Desarrollo de la visualización: tendencia que considera cómo los educadores, los textos escolares y los softwares educativos promueven el desarrollo de la visualización.
- Tipos de visualización y complejidad visual: considera los tipos de visualización contemplados en la enseñanza de las matemáticas y los niveles de complejidad que subyacen a su consideración.
- Rol de la visualización en el desarrollo de actividades cognitivas: en esta tendencia de investigación la atención recae en el vínculo entre la visualización y el desarrollo de otras actividades cognitivas (generalización, razonamiento deductivo, construcción, argumentación y resolución de problemas).
- Visualización en el estudio de objetos matemáticos: esta tendencia de investigación contempla el papel que desempeña la visualización en la enseñanza de objetos matemáticos específicos.

3. Resultados

La revisión de la literatura especializada permitió, como se llamó la atención en el apartado anterior, clasificar la literatura sobre visualización en cuatro tendencias de investigación: Desarrollo de la visualización, Tipos de visualización y complejidad visual, Rol de la visualización en el desarrollo de actividades cognitivas, y visualización en el estudio de objetos matemáticos. El orden expuesto alude al lugar que ocupa cada tendencia según el número de reportes discriminados. En algunos casos, los reportes analizados aportan elementos de reflexion que aluden, simultáneamente, a más de una de las categorías reseñadas. En este sentido, la primera y segunda de las tendencias son contempladas respectivamente en 23 y 22 de los 49 reportes analizados; mientras que la tercera y cuarta de las tendencias, lo son, según el caso, en 19 y 6 de estos reportes. En lo que sigue se describen en detalle las investigaciones que conformaron cada una de las tendencias de investigación reseñadas.

3.1. Desarrollo de la visualización

Asumir las figuras como herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos no es obvio ni espontáneo (Duval, 2011). La visualización es un asunto relativo al tratamiento de información. Es susceptible de aprendizaje: el desarrollo de la visualización debe propiciarse a lo largo de toda la educación básica (Marmolejo y Vega, 2012).

El área de superficies planas es un tópico matemático propicio para suscitar el desarrollo de la visualización (Marmolejo y Vega, 2012). Son argumentos que justifican estas afirmaciones: el estudio del área de superficies planas se promueve desde los primeros grados de la educación básica y suscita la aplicación de operaciones para transformar bidimensionalmente las figuras e inducen cambios dimensionales. Estos aspectos son determinantes al considerar la visualización como objeto de estudio (Duval, 2003, 2005).

Las investigaciones de Duval (1998) han enfatizado que el desarrollo de la visualización debe promoverse independientemente (y de forma previa) de otras actividades cognitivas, es el caso del razonamiento (deductivo y argumentativo) y la construcción de figuras geométricas.

En cuanto a las distintas formas de ver permitidas por las figuras (aprehensión operatoria y la discursiva) se ha establecido que su desarrollo debe promoverse en tiempos y espacios distintos (Duval, 2004). Para el caso de la aprehensión operatoria se debe considerar tres condiciones: las tareas propuestas no deben implicar en su desarrollo ningún tipo de actividad de razonamiento (aplicación de definiciones o teoremas), no debe estar implicado ningún tipo de cambio dimensional en la secuencia de sub-figuras consideradas y las tareas deben organizarse secuencialmente en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad (Duval, 1999).

Las investigaciones de Duval también asignan un rol determinante a la aplicación de tareas de completado de figuras para el desarrollo de la aprehensión discursiva. Es decir, actividades donde "los ángulos, los segmentos están parcial o completamente borrados, de manera que con un golpe de vista, nada o casi nada se organiza en una forma inmediatamente reconocible" (Duval, 2003, p. 23). Así, los estudiantes de forma visual y, con ayuda de instrumentos, deben aplicar sobre las figuras prolongaciones. Estos trazos promueven la aparición de puntos de intersección ausentes y permiten la discriminación de nuevos elementos geométricos.

Al respecto, Duval (2003) señala que las figuras deterioradas pueden ser representaciones icónicas (una figura representando una casa) o no icónicas (objetos básicos en la enseñanza de la Geometría: triángulos, rectángulos…) o bien representaciones ensamblados de diversas formas. El mismo autor, resalta además tareas de esta naturaleza no son "una actividad cognitivamente centrada sobre las figuras particulares y matemáticamente remarcables, sino sobre el proceso de visualización para el desarrollo de la actividad geométrica" (p.24). En este sentido, las actividades de restauración obligan a realizar operaciones como observar una figura fuera de su marco de referencia, prolongar la recta soporte de los segmentos, reorganizar una figura dada y discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones.

Presmeg (1986a, 1986b) y Gal y Linchevski (2010), por otra parte, firman que los educadores deben discriminar las dificultades visuales de sus estudiantes y ser conscientes del momento cuando las enfrentan. Consideran esta cuestión como un elemento determinante para hacer de la enseñanza de la Geometría un aspecto centrado en el desarrollo de capacidades, entre otras, las visuales. En particular, la segundas de las investigaciones plantea cuestiones a considerar en investigaciones futuras. Por ejemplo, ¿cómo los docentes que han sido expuestos a un conocimiento visual lo utilizan durante la instrucción en el aula? ¿Cómo estos educadores incorporan las teorías de la percepción visual en el análisis de las dificultades de los estudiantes y en su desarrollo profesional?

Otros estudios, como los de Warren y Cooper (2008) muestran cómo las acciones de los profesores ayudan a la adquisición de capacidades visuales. El trabajo de Markovits, Rosenfeld y Eylon (2006), por su parte, describió *patrones de crecimiento* visual. Los cuales evidencian un inadecuado desarrollo de habilidades visuales en educadores de pre-escolar y de los primeros grados de educación básica. Las habilidades visuales promovidas por estos educadores en el aula son similares a las evidenciadas por sus estudiantes. Este estudio también reseña que los profesores "equipados con el conocimiento de contenido pedagógico" sobre la percepción visual son conscientes de las dificultades de sus estudiantes y pueden lidiar con ellas. Por ejemplo, proporcionan estrategias para identificar figuras y descomposiciones claves, igualmente para interpretar datos en las figuras y elementos que permiten la resolución de la tarea propuesta (Gal, 2005, citado en Gal y Linchevski, 2010, p. 180).

Presmeg (1991), desde un punto de vista distinto, estudió cómo los educadores facilitan u obstaculizan el recurso de la visualización. Clasificó a los profesores en *visuales*, *no visuales* y *visualmente intermedios*. Esta investigación puso en evidencia varias cuestiones. Por un lado, los profesores *intermedios* utilizaron métodos visuales característicos de los profesores *visuales*, pero, a diferencia de estos pusieron en acto actitudes que expresan la visualización como una actividad no necesaria ni importante en las matemáticas. Por otro lado, en relación a los estudiantes, la investigación mostró que los profesores *no-visuales* influyeron en las formas de proceder de los estudiantes con altas capacidades visuales. Dichos estudiantes trataron de prescindir de sus métodos visuales preferidos en favor de los métodos no visuales instaurados en clase.

Inan y Dogan-Temur (2010), por su parte, reseñaron que los profesores de pre-escolar de Turquía privilegian visualizaciones estáticas en sus procesos de enseñanza: las figuras no suelen transformarse o discriminarse más allá de lo percibido a primer golpe de vista. Esto se evidencia en el actuar los educadores: demandan el reconocimiento de figuras elementales a partir de sus formas y de las similitudes con objetos cotidianos. En menor proporción, los educadores consideran la discriminación de las características de las figuras y el establecimiento de diferencias y similitudes entre ellas. En relación a los materiales de mayor uso en sus clases, este estudio llama la atención que muy pocos profesores introducen el uso de elementos y acciones para posibilitar transformaciones figurales. Por ejemplo, el tangram y el recorte y pegado de papel.

La literatura considera los software educativos como soportes para el estudio de la geometría y el desarrollo de la visualización. En palabras de Mahama y Villani (1998) estos recursos posibilitan la simulación de "construcciones tradicionales con regla y compás" (p. 341) y permiten "mover los elementos básicos de una configuración sobre la pantalla mientras se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes" (p. 341). Estas cuestiones, sin lugar a dudas, privilegian "la presentación dinámica de los objetos geométricos y favorece la identificación de sus invariantes" (p. 341). En otras palabras, permiten "manipular, explorar y analizar las construcciones y, de ésta manera, contribuir a mejorar la visualización" (Haas y Rosado, 2011, p. 1198).

Una de las principales cuestiones planteadas en la investigación sobre el vínculo visualización y software educativo es "¿Cómo interviene la utilización de los SGD [¿Sistemas geométricos dinámicos] en el paso de la axiomática natural a la formal, particularmente en los procesos visualización e intuición geométrica y cómo influye el uso de este software?" (Chacón, 2014, p. 16). Al respecto, se ha constado que en "el aprendizaje geométrico con software dinámico se produce una gran ruptura entre estas dos diferentes formas de visualización (icónica y no icónica). Esta ruptura es importante, pues, "solo la visualización no icónica es pertinente para los procesos geométricos que se deben producir" (Chacón, 2014, p. 16). Cuestiones similares se reportan en Haas y Rosado (2011) y en Kordaky (2003). En estas dos investigaciones evidencian el papel de los SGD en el desarrollo de la visualización y su rol en la constitución de conocimiento matemático. En el primer caso, en torno a los conceptos de congruencia y semejanza, en el segundo, en el estudio del área.

Desde un punto de vista contradictorio, investigaciones como las de Larios (2006) y Herrera (2011) detectan dificultades en el desarrollo de la visualización a través del uso de los SGD. Estos trabajos muestran que, tras la aplicación de la operación de arrastre, muchos estudiantes no logran discriminar cadenas de figuras ni identificar características geométricas representadas en las configuraciones construidas. A manera de conclusión, estos autores establecen que, los educadores deben asumir un papel determinante para ayudar a salvar dichos obstáculos y posibilitar el desarrollo de la visualización a través del uso de este software.

Otra cuestión de interés en esta tercera tendencia de investigación es el papel que desempeñan los libros de texto para promover el desarrollo visual. La importancia de estos materiales didácticos radica en que son uno de los más usados por los profesores al planificar, preparar y realizar sus clases de matemáticas (Schmidt et al., 1996), y constituyen una fuente para identificar el contenido impartido en el aula (Pepin, Haggarty y Keynes, 2001) y las formas cómo se presenta (Cobo y Batanero, 2004).

En este sentido, la atención ha recaído en cómo los libros de texto promueven el desarrollo de la visualización a través del estudio del concepto de área. Así, pues, son objetos de interés la discriminación de elementos constitutivos de la visualización (Marmolejo y González, 2013a), funciones que desempeña la visualización (Marmolejo y González, 2013b), los niveles de complejidad que subyace a la consideración de la visualización (Marmolejo 2014), las estructuras de control incluidas para determinar formas de ver especificas (Marmolejo y González, 2015a).

Las cuestiones anteriores permiten caracterizar las diferentes formas de visualización que imperan en los libros de texto y si estos materiales promueven, o no, el desarrollo de la visualización. Puntualmente, en Marmolejo (2014) se concluye que los libros favorecen el desarrollo visual al incluir estructuras de control, No es así cuando privilegian algunos tipos de funciones visuales. En cuanto a los niveles de complejidad asumidos, estos propician el desarrollo visual pero en menor medida a como sucede con las estructuras de control introducidas.

3.2. Tipos de visualización y complejidad visual

El cerebro espontáneamente organiza los elementos perceptuales que llegan a él. Son varias las leyes (gestálticas) que explican la organización perceptual espontánea de un individuo cuando centra su atención sobre una configuración figural. Por ejemplo, la Leyes de la Buena Continuidad y de Cierre. La primera es la “tendencia a reunir en una única estructura aquellas partes o unidades que parecen estar alineadas o en suave continuidad direccional unas respecto a otras sin que las demás cosas varíen” (Rock, 1985, p. 116); la segunda ley, por su parte, alude a la “tendencia, sin que varíe el resto, a agrupar en estructuras unificadas aquellos elementos que juntos constituyen una entidad cerrada” (p.118).

Pero, no basta con formas espontáneas de ver para responder a las exigencias visuales exigidas en el estudio de las matemáticas. Es indispensable poner en juego actividades mentales, las cuales van en contravía de aquellas formas de ver que espontáneamente impone el cerebro (Duval, 2004). Una figura permite aprehensiones de naturaleza diferente (Duval, 1995): *perceptual* (determinación de información a primer golpe de vista), *operatoria* (modificaciones mereológicas, posicionales y ópticas), *discursiva* (articulación entre discurso y acciones figurales) y *secuencial* (seguimiento de pautas para construir una figura o descripción de ellas). Mientras la primera de las aprehensiones obstaculiza algunos aspectos relativos a la estructura matemática de las figuras, las restantes son aplicadas reiterativamente en tareas de demostración. En algunos casos unas aprehensiones se subordinan a otras, en otros, se relacionan y, en ciertos momentos, se oponen (Duval, 2003).

En esta línea de ideas, investigaciones como las realizada por Marmolejo y Vega (2012) han analizado el paso de la aprehensión perceptual a la operatoria. Entre los resultados discriminaron dos clases de visualización: *local con pérdida de globalidad* (la figura es percibida de forma "cuadriculada" como si fuese un mosaico de baldosas, las características globales de la figura son dejadas de lado) y *local sin pérdida de globalidad* (se consideran tanto las características internas como globales de la figura). A manera de conclusión estos autores establecen que la visualización local sin pérdida de globalidad determina los procedimientos matemáticos más potentes y económicos. La visualización local con pérdida de globalidad, la más espontánea y más considerada, por su parte, los obstaculiza.

Duval (2005) y Gal y Linchevski (2010) mostraron, por su parte, que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica centrada en lo que “a primera a(No va) vista se ve”. La cual no solo resulta insuficiente, además dificulta la aplicación y tratamiento de conceptos y relaciones geométricas (Duval, 2005).

Otros estudios como los realizados por Deliyianni, Elia, Gagatsis, monoyiou y Panaoura (2009) han confirmado que los tipos de modificación posicional, óptico y mereólogico (No sé qué significa) constituyen niveles de jerarquía que explican la aprehensión de las figuras en tareas de geometría. En un sentido similar, Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou y Michael (2009) revelaron diferencias en el desempeño de los estudiantes según el tipo de modificación considerado. Esta última investigación también evidenció falta de consistencia en la aplicación de un tipo de modificación en relación a otro. Puntualmente, describieron rendimientos similares en la aplicación de modificaciones ópticas y posicionales, pero no en las modificaciones operatorias. También evidenció consistencias en la aplicación de las modificaciones mereológicas y ópticas; nunca en la de modificaciones posicionales. El trabajo de Elia et al. (2009), por otra parte, llamó la atención a que “algunas de las tareas de modificación posicional…fueron abordadas de manera similar a tareas de modificación mereológica y el resto… de manera similar a tareas de modificación óptica” (p. 6).

Desde un punto de vista distinto, Clements, Swaminathan, Zeitler y Sarama (1999) concluyeron que, los niños entre los 3 y 6 años al identificar, describir y clasificar formas reconocen sin complejidad alguna componentes y propiedades simples en figuras estándares. Forman esquemas basados en el análisis de las características de formas visuales y relacionan formas con prototipos visuales.

La discriminan de cuadriláteros representados de forma estereotipada o de manera diferente a como se hace en los libros de texto (p.e. una orientación diferente) también es una cuestión de interés en la literatura especializada. Al respecto, Moriena y Scaglia (2003) observaron que “los dibujos estereotipados de estas figuras influyen en la valoración realizada por los jóvenes en su reconocimiento”, asimismo, que al identificar figuras a partir de sus representaciones figurales los niños aluden a la posición de la figura para justificar sus respuestas.

En un sentido similar, el trabajo de Larios (2006) encontró que en algunos estudiantes la orientación es un atributo determinante en la resolución de un problema geométrico. Por ejemplo, en tareas donde las figuras se representan de forma y con orientaciones no prototípicas (con el objeto de detectar el tipo de figura, sus relaciones espaciales y actuar sobre ellas) se tiende a cambiar las figuras iniciales por otras cuyas formas y orientaciones son conocidas y consideradas correctas. Es sobre las segundas de las figuras que se centra su atención para resolver la actividad propuesta, no sobre las primeras.

También se ha estudiado el papel del conocimiento prototípico y los atributos formales de algunas clases de figuras en las estrategias de clasificación de representaciones figurales. Walcott, Mohr y Kastberg (2009), entre otros, verificaron que, al comparar dos figuras representadas sobre una cuadrícula con formas diferentes e igual área (rectángulo y paralelogramo), la mitad de los estudiantes asumen ambas representaciones como iguales. Estos estudiantes describieron las características comunes de las dos figuras asociando una forma a la otra mediante acciones de transformación.

En cuanto a los estudiantes que en el estudio de Malcott et al (2009) asumieron las figuras como distintas, centraron su atención en atributos formales o impuestos en comparaciones con prototipos familiares, por ejemplo, ángulos, lados, medidas, líneas paralelas, entre otros; o concibieron las figuras como diferentes pues, según ellos, cada una pertenecía a una clase de figuras de naturaleza distinta. Esta investigación identificó en el primer grupo de estudiantes la movilización de una visión dinámica de las figuras (los atributos no vinculados a las definiciones se manipulan libremente), mientras que el segundo grupo se discriminó una visión estática de las figuras (consideraron solo atributos y propiedades como el tamaño o el número de lados y/o los ángulos).

En un orden de ideas distinto, Ramírez (2012) estudió las habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático. Consideró como objeto de estudio los movimientos en el plano y la igualdad de figuras (y su unicidad). A manera de conclusión, se señaló que los alumnos con talento matemático evidencian niveles de inteligencia y capacidad visual superior a otros tipos de estudiantes. También que este tipo de alumnos aplican una alta variedad de habilidades visuales (percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, discriminación visual). Este estudio concluyó que, durante el proceso de aprendizaje, las habilidades visuales evolucionan de forma diferente en los estudiantes con talento matemático y lo que no pertenecen a dicho grupo.

También existen estudios que evidenciaron la existencia de factores que facilitan o entorpecen la discriminación de operaciones visuales. Cuestión que explica por qué para la mayoría de los estudiantes es complejo considerar las figuras como herramientas heurísticas. En Padilla (1992), por ejemplo, se aludió como elementos que propician la aplicación de la operación de reconfiguración tanto la concavidad de las partes a reagrupar, la inclusión (o no) de fraccionamientos de las partes claves, como el número de operaciones a incluir y la necesidad (o no) de desdoblar una figura o parte de ella. Marmolejo (2007), por su parte, llamó la atención como elementos resaltantes para contemplar la operación de fraccionar la superficie de una figura en sub-figuras al contorno de la figura y a la orientación de los trazos a introducir en el proceso de fraccionamiento.

Otros estudios como los de Marmolejo y González (2015a) se estableció elementos incluidos por los libros de texto para afectar la aplicación de variadas operaciones visuales: presentación del contenido, explicitación de procedimientos, elementos que afectan la visibilidad en las figuras y cuestiones alusivas a iconismo. Igualmente, se incluyen dentro de este grupo investigaciones las realizadas por Duval (1995, 1998), Grenier (1988, en Padilla, 1992), Küschemann (1981, en Padilla, 1992) y Lemonidis (1991).

La complejidad visual en los procederes de los educadores también es una cuestión de interés en la Educación Matemática. Guirette (2006), por ejemplo, evidenció, en algunos profesores, un incipiente dominio de la aprehensión operatoria al tratar "Pruebas sin palabras". En Guirette y Zubieta (2010), por su parte, se concluyó que para los educadores es complejo identificar las unidades figurales bidimensionales a discriminar en la resolución de una tarea. En casos donde los educadores logran discriminarlas, lo hicieron de forma aislada y no como un conjunto de elementos constituyentes de la representación en cuestión. Esta investigación también señaló la inclusión de acciones de discriminación o introducción de trazos auxiliares (para desencadenar información relevante a la resolución de la tarea propuesta) como cuestiones complejas para la mayoría de los educadores.

3.3. Rol de la visualización en el desarrollo de actividades cognitivas

Algunos estudios contemplan el papel de la visualización en la discriminación de patrones y el desarrollo de generalizaciones. Por ejemplo, Yeap y Kaur (2008) asumieron la habilidad para discriminar estructuras (y relaciones) de las secuencias figurales y el uso de organizaciones heurísticas como factores cognitivos facilitadores en el descubrimiento de estrategias de generalización.

Otras investigaciones, centraron su atención en el papel de las secuencias de figuras bidimensionales y de las representaciones aritméticas en procesos de abducción, los cuales apoyan y justifican inducciones que conducen a generalizaciones. Al respecto, Rivera y Becker (2007) concluyeron tres cuestiones: a) el tipo de representación considerada representa diferencias significativas entre cómo son descubiertos, construidos y generalizados (en términos simbólicos) los procesos abducidos, b) quienes realizan abducciones a partir de las representaciones numéricas muestran un mayor número de estrategias. No es el caso de los estudiantes que lo hacen a partir de figuras, y c) los estudiantes muestran mayor capacidad de justificación de generalizaciones cundo recurren a la viabilidad de formas abducidas. Los estudiantes al proceder de tal forma incluyen los procedimientos más pertinentes y potentes.

En una segunda investigación, Rivera y Becker (2008) describieron cómo se aplican las generalizaciones a partir de *modelos lineales* de figuras. Según el nivel de complejidad identificaron tres estrategias: constructiva estándar, constructiva no estándar y deconstructiva. Las dos primeras categorías fueron las de menor complejidad y de mayor uso. Estuvieron asociadas a una visualización centrada en la discriminación de las unidades unidimensionales y permitieron determinar las secuencias figurales claves del patrón en juego. La generalización por deconstrucción, al contrario, fue la de mayor complejidad y de menor uso. Estuvo vinculada con la discriminación de composiciones de sub-figuras bidimensionales superpuestas entre sí. Donde uno o varios de sus lados o vértices correspondieron simultáneamente a dos o más sub-figuras. En este último modelo de generalización se aplicó un proceso de separación de las sub-figuras a través de la composición y descomposición de unidades unidimensionales o cero-dimensionales. Estas unidades permitieron determinar el patrón en juego.

Dentro de esta tendencia de investigación, igualmente, destaca el estudio de Steele (2008). En un proceso de enseñanza centrado en ayudar a "identificar y generalizar patrones de relaciones entre cantidades en *crecimiento pictórico* y problemas de cambio" (p. 97), esta investigación evidenció que los estudiantes inician sus procesos de identificación de patrones y de generalización a partir del dibujo de configuraciones geométricas. Por ejemplo, secuencias de figuras. Tales acciones permitieron discriminar los patrones en cuestión y "transferirlos" a números u operaciones numéricas, lo cual permitió describir el patrón observado y representarlo simbólicamente. Una última cuestión a considerar en esta investigación alude al papel de las figuras en torno a la explicitación de patrones: la mayor parte de la población realizó generalizaciones directamente de la información visual de las configuraciones geométricas sin recurrir a ningún tipo de tabla.

En cuanto a los estudios que contemplan como objeto de análisis el razonamiento deductivo se encuentran los trabajos de Sánchez (2003), Torregosa y Quesada (2007), Torregosa, Quesada y Penalva (2010) y Pedemonte y Reid (2011). En el primer caso, se estableció que la no aplicación de la operación de reconfiguración (transformar una figura en otra de contorno global distinto) es el principal causante de dificultades en el desarrollo de demostraciones. El segundo estudio, por su parte, destacó como causas limitantes de los procesos de razonamiento deductivo, la presencia de configuraciones geométricas cuya organización perceptiva obstaculizó la discriminación de las sub-configuraciones claves. Estas propiciaron un conocimiento insuficiente de las relaciones lógicas e introdujeron dificultades para identificar y manipular las sub-configuraciones iniciales. En cuanto al trabajo de Torregosa, Quesada y Penalva (2010), en él se determinó que la inclusión de obstáculos para la aplicación de aprehensiones operativas, la ausencia de aprehensiones discursivas y la falta de coordinación entre las aprehensiones discursivas y operatoria, constituyen aspectos inhibitorios o posibilitadores de tipos de visualización que desencadenan procesos de razonamiento deductivo. Finalmente, Pedemonte y Reid (2011) establecieron la abducción como un elemento no siempre determinante en la construcción de pruebas. En ocasiones, la abducción puede constituir una fuente de obstáculos.

Otros estudios como los realizados por Mesquita (1989) consideraron como elementos determinantes para la mostrar de los argumentos incluidos en la resolución de un problema, el tipo de pregunta propuesta, la aprehensión asumida y el estatus que representa la figura; asimismo, la presencia o no de obstáculos heurísticos. La investigación de León (2005) también contempló el estudio de las relaciones entre las aprehensiones figurales y su recurso a razonamientos discursivos como elementos discriminatorios de variables semióticas y argumentativas. Se concluyó que tales relaciones inciden en procesos de "surgimiento y visualización de las relaciones objeto de la expansión discursiva y de los procesos de argumentación matemáticos" (p. 311). Se concluyó, además, que, la aprehensión operatoria es poco considerada en tareas argumentativas; la aprehensión discursiva, lo es dependientemente de la aprehensión perceptual y del valor asignado al surgimiento de unidades apofánticas. Asimismo, este estudio señaló que, en procesos de aprehensión discursiva, "la designación privilegió las formas bidimensionales" (p. 311) y una poca consideración de la aprehensión operatoria. También, "restringió las operaciones de predicación y de comparación a aspectos perceptuales manifiestos por el registro" (p. 311).

La investigación de Figueiras y Deulofeu (2005), desde un interés distinto, discriminó diferentes clases de visualización en la resolución de problemas desplegados por los estudiantes. En palabras de los autores, estas clases de visualización estuvieron relacionadas con el nivel de madurez matemático del sujeto. Este trabajo concluyó que el reconocimiento y discusión de las clases de visualización consideradas por el resto de compañeros, ayuda a los estudiantes a dotar de significado al proceso de resolución del problema planteado. Tal cuestión apoyó el rol de la interacción social en el desarrollo de habilidades visuales.

3.4. Visualización en el estudio de objetos matemáticos

La investigación de *Lemonidis (1991)* evidencia que la comprensión y aplicación de la operación geométrica de homotecia (una transformación afín) exige un trabajo previo de naturaleza cognitivo con fines matemáticos: discriminación de configuraciones básicas donde se manipulan la orientación y ubicación de la figura objeto, la figura imagen y el punto de homotecia. La explicitación de lo anterior, unido a la puesta en correspondencia entre las unidades significantes de las representaciones figurales y simbólicas con números que determinan el estudio de la homotecia, beneficia, entre otros aspectos, la discriminación del centro de homotecia en una figura homotética, la determinación de puntos homólogos y la determinación del sentido de la transformación de la figura imagen.

Marmolejo, Insuasti y Guzman. (2016) al explorar cómo el concepto de fracción tiende a ser estudiado en los libros de texto de los primeros ciclos de la educación básica identifican, un desequilibrio entre el número de tareas (presentación de contenido, ejemplos y ejercicios) que privilegian roles visuales potentes y aquellas donde se hace de forma moderada o inexistente. Los libros, pues, ignoran el rol que desempeña la visualización para el estudio de las fracciones. Esto, al menos, en los primeros ciclos educativos.

León (2005), por su parte, identificó fenómenos asociados a la aprehensión perceptual que bloquean el establecimiento de relaciones de naturaleza pitagórica. Entre otros, la falsa percepción de formas iguales o diferentes y una percepción poco desarrollada de elementos bidimensionales (ángulos) y unidimensionales (lados). Estos aspectos determinan procesos de exploración que desvían la atención de la aprehensión operatoria y del razonamiento hacia maneras de proceder heurísticamente no pertinentes. Además, estos procesos impiden que la instanciación geométrica propicie las condiciones para la emergencia de las longitudes y las amplitudes como objeto de las reflexiones de los estudiantes” (p. 308).

En cuanto al objeto matemático área de superficies planas, investigaciones como la realizada por Padilla (1992) determinaron que el explicitación de transformaciones figurales previa a la enseñanza del área evita la confusión entre el área y el perímetro.

Por otra parte, Marmolejo y Vega (2012) establecieron que la manera de ver una figura desencadena procedimientos diferentes para comparar la cantidad de área de dos figuras, lo cual se traduce en la consideración de tratamientos y conversiones semióticas distintas. Este estudio, además, identificó una diferencia entre los estudiantes que no reflexionan sobre las posibilidades heurísticas y operatorias de las figuras y quienes no lo hacen: mientras que los primeros tienden a recurrir a procedimientos engorrosos y poco asertivos, los segundos son más directos y asertivos al resolver actividades donde el área de superficies planas es un objeto de consideración.

En un sentido distinto, Outhred y Mitchelmore (2000, 2004) identificaron conexiones entre las formas de cubrir un rectángulo por medio de unidades cuadradas de igual área y las estrategias de enumeración a las cuales se recurre cuando se quiere calcular su área. Por ejemplo, los estudiantes que representaron la estructura de una matriz en términos de filas y columnas tendían a contar por grupos (filas o columnas) o utilizando la multiplicación. Battista, Clements, Kathryn y Auken (1998) señalan que dichas acciones visuales no son evidentes para los estudiantes.

En consecuencia, Outherd y Mitchelmore (2000) proponen una serie de principios que promueven la comprensión intuitiva del concepto de medida de área: cubrimiento completo (la superficie del rectángulo se cubre totalmente con figuras de forma y cantidad de área igual a la unidad seleccionada); estructura espacial (las unidades se van alineando de forma que haya el mismo número de unidades en cada fila); relaciones de tamaño (tanto el número de unidades en cada fila y el número de filas se puede determinar a través de la longitud de los lados del rectángulo); y estructura multiplicativa (el número de unidades en una matriz rectangular se puede calcular a través del número de unidades en cada fila y en cada columna).

4. Conclusiones

Reflexionar acerca de la forma de abordar una investigación en un campo "permite considerar, confrontar, adaptar o evitar cuestiones que han sido tratadas; o incluso, retomar [las] que fueron consideradas y abordadas desde nuevas perspectivas teóricas o metodológicas" (Marmolejo y González, 2015b, p. 53). También posibilita identificar el núcleo común de los problemas considerados (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006).

La caracterización de la revisión bibliográfica expuesta en este trabajo arrojó una serie de reflexiones cuya interpretación devela conclusiones sobre el papel de la visualización en el estudio de las matemáticas que merecen ser destacadas:

- La visualización desempeña un rol determinante para el desarrollo y tratamiento de otras actividades cognitivas y la construcción de conceptos matemáticos. Su inclusión en procesos de instrucción y aprendizaje, aunque no es obvia ni espontánea, debe ser asumida.
- El desarrollo de la visualización se debe incluir desde la educación básica. Uno de los tópicos en el cual resulta más propicio su desarrollo es el área de superficies planas. Los libros de texto y el software educativo podrían desempeñar un rol determinante.
- No obstante, son los educadores quienes deben organizar intervenciones exitosas que enfrenten y sobrepasen los conflictos de aprendizaje. Esto, a través del reconocimiento del rol de la visualización, de los elementos a considerar para su desarrollo y de las dificultades reportadas. Es de esta forma, la visualización podrá desempeñar el rol que le corresponde en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- En los programas de cualificación y formación docente, es urgente y necesario considerar espacios que susciten reflexiones sobre cómo la visualización puede ser desarrollada e incluida para soportar el tratamiento del razonamiento, la construcción, la modelación y la resolución de problemas, así como el estudio de conceptos matemáticos específicos.
- Es necesario, pues, promover el estudio, entre variados aspectos, de cuáles son los tópicos del área o de otros conceptos que, incluidos en la educación básica, son más o menos propicios para promocionar habilidades visuales relacionadas con las exigencias cognitivas que las matemáticas requieren.
- También, es indispensable analizar el efecto de la aplicación de pautas recomendadas por la literatura especializada para favorecer el desarrollo de la visualización a través del diseño y aplicación de propuestas de enseñanza y apuestas instruccionales.
- Asimismo, determinar cómo las intervenciones de los educadores mediadas por el uso de los textos escolares y los softwares educativos pueden considerarse para alcanzar el propósito mencionado.

El reporte presentado en esta investigación constituye una entrada infranqueable a nuevos caminos para abordar desde puntos de vista variados los fenómenos que intervienen en la sinergia visualización-estudio de las matemáticas. En este sentido, cuestiones como las que reseñaremos a continuación organizan cuatro frentes de preguntas que pueden reorientar y potencializar la investigación educativa sobre la sinergia visualización-estudio de las matemáticas:

- En cuanto a los tipos de visualización y las complejidades cognitivas que le subyacen, es necesario considerar ¿cómo los educadores suscitan la articulación entre las aprehensiones que posibilitan las figuras y la sinergia entre la visualización y demás actividades cognitivas? ¿En cuáles casos, unas y otras, se relacionan? ¿En cuáles se apoyan? y ¿en cuáles se oponen? ¿Cuáles son sus efectos para el aprendizaje? ¿Qué factores de visibilidad (o elementos de control visual), funciones visuales y estrategias meta-cognitivas potencializan, complejizan u obstaculizan la aplicación de operaciones, cambios dimensionales, de focalización y figúrales? ¿Cuáles tipos de visualización se suscitan en los tópicos donde es posible el desarrollo de la visualización? ¿Qué grado de complejidad les subyace? ¿Cuál es su aporte para estudio de las matemáticas?
- La investigación en torno al tratamiento de actividades cognitivas evidencia un alto interés en los vínculos visualización-razonamiento deductivo y visualización-modelación. No es el caso de la articulación entre la visualización y la argumentación y la resolución de problemas. Es necesario pues la realización de nuevos estudios que amplíen la comprensión de cómo la visualización favorece u obstaculiza la resolución de problemas y la argumentación, asimismo que evidencia pautas para su promoción y establezcan dificultades, errores y obstáculos tanto en educadores como en estudiantes.
- Sobre el rol de la visualización en el estudio de conceptos matemáticos son preguntas a incluir en nuevas investigaciones ¿cómo los educadores que participan en procesos de reflexión sobre el rol de la visualización en el estudio de las matemáticas a) suscitan su aplicación en la construcción delos conceptos de fracción?, b) al utilizar los libros de texto superan las limitantes visuales que estos materiales imponen?, c) ayudan a sus estudiantes a superar los bloqueos que encuentran al estudiar las relaciones pitagóricas?, y d) determinan cómo interviene la visualización en los distintos tópicos en que se suscita el estudio del área (magnitud, medida directa, paso de la medida directa a la indirecta, extensión de la fórmula del cuadrado a demás figuras rectilíneas, área de figuras irregulares, áreas sombreadas, relación con otras magnitudes, entre otras)? Asimismo, es una cuestión a considerar ¿cuáles son los efectos de la instrucción realizada en el aprendizaje?
- Finalmente, en lo relacionado con el desarrollo de la visualización son preguntas a considerar ¿cuál es el conocimiento, por ejemplo, el didáctico-matemático (Gonzato, Godino, y Neto (2011).), que los educadores de enseñanza básica tienen acerca del desarrollo de la visualización a través del estudio de las matemáticas? ¿Cómo su participación en programas de cualificación y formación modifica dicho conocimiento? ¿Cuáles dificultades se encuentran? Tras la participación en programas de formación y cualificación, ¿cuáles son las apuestas instruccionales y mediacionales consideradas? ¿Qué conflictos de enseñanza y aprendizaje (errores, dificultades, obstáculos) se enfrentan? ¿Cuál es el rol que desempeñan las facetas meta-cognitivas de regulación y control en tales apuestas? ¿A través de cuáles soportes didácticos las promueven y cuáles son los efectos que producen?

La respuesta a las cuestiones reseñadas es un camino que hará factible el reflexionar sobre nuevas estrategias de instrucción, las cuales permitan a estudiantes y educadores sobrepasar la complejidad que representa el incluir asertivamente la visualización en el estudio de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Battista, M., Clements, D., Kathryn, J.A. y Auken, C.V. (1998). Student´s spatial structuring of 2D arrays of squares, *Journal for Research in Mathematics Education* 29(5), 503-532.

Chacon, I. M. (2004). Visualizacón y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas. En: Martinho, M. H.; Tomás Ferreira R. A.; Boavida, A. M.; Menezes, L. (Eds.). (2014). *Atas do XXV Semin´ario de Investiga¸c˜ao em Educa¸c˜ao Matem´atica. Braga: APM*.. p. 5–28.

Clements, D. Swaminathan, S. Zeitler, M.A. y Sarama, J. (1999). Young children´s concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la medida en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias,* 22(1), 5-18.

Davis. P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 333-344.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A. y Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of CERME 6*. Lyon. France.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. Brasil, Sáo Paolo: Editorial PROEM.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y…una quinta. En M.C. Chamorro (Ed), *Números, fórmulas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Sociedad anónima de fotocomposición.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales.* Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1ª ed.). Cali. Colombia: Programa Editorial.

Elia, I, Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A. y Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 1-8.

Figueiras, L.; Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización (Making meaning of mathematics through visualization). *Enseñanza de las Ciencias.* 23(2), 217-226.

Gal, H y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics,* 74(2), 163-183.

Godino, J., Font, V., Contrera, A. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9(1), 117-150.

Gonzato, M., Godino, J.D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática,* 23(3), 2-37.

Guirette, R. y Zubieta, G. (2010). Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático. *Educación matemática*, 22(2), 93-121.

Guirette, R. (2006). *Pruebas sin Palabras. Un estudio de casos con profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. México.

Haas, N.E., Rosado, M.P. (2011). Geometría dinámica en la visualización de problemas geométricos en el nivel superior. Una propuesta. En P. Leston (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 24, pp. 1216-1223). México, DF: Colegio Méxicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C.

Herrera, J. (2011). Utilización de la función de arrastre del software cabri-geometre para el desarrollo del pensamiento geométrico en alumnos de bachillerato. En P. Leston. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol 24, pp. 1142-1150). México, DF: Colegio Méxicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C.

Icart M.T. y Canela-Soler J. (1994). El artículo de revisión. *Enfermería Clinica*,4 (4), pp. 180-194.

Inan, H.Z. y Dogan-Temur, O. (2010). Understanding kindergarten teacher´s perspectives of teaching basic geometric shapes: a phenomenographic research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(5), 457-468.

Kolbe, R.H. and Burnett, M.S. (1991) Content-Analysis Research: An Examination of Applications with Directives for Improving Research Reliability and Objectivity. Journal of Consumer Research, 18, 243-250.

Kordaki, M (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 177–209.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la referencia de propiedades geométricas en un ambiente de de geometría dinámica en el nivel medio. *RELIME,* 9(3), 361-382.

Lémonidis, C. (1991). Analyses et réalisation d´une expérience d´enseignement de homothétiee. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 295-324.

Léon, O. (2005). *Experiencia Figural y Procesos Semánticos para la argumentación en geometría*. Disertación doctoral no publicada. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Mahama, c. y Villani, V. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century*. Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands. p. 337-346. 1998.

Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 4, pp. 145-152). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.

Marmolejo, G-A. (2020). Función de control visual en el tratamiento del área de superficies planas. Un estudio comparativo de libros de texto colombianos y españoles. En *Colección Permanente de Publicaciones Docentes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño* (1 edición). P. 121. San Juan de Pasto, Gustavo-Adolfo Marmolejo Editor. Editorial universitaria.

Marmolejo, G-A., Sánchez, N. y Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *REIEC*, 12(2), 18-28.

Marmolejo, G-A., Guzman, L.Y. y Insuasti, A.L. (2016). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista científica*, 23(1), 43-56

Marmolejo G-A. y González, M-T. (2015a). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Relime,* 18(3)*,* 301-328.

Marmolejo G-A. y González, M-T. (2015b). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *REIEC*, 10(1), 45-57

Marmolejo G-A. y González, M-T. (2013a). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, *25*(3), 61-102.

Marmolejo G-A. y González, M-T. (2013b). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, *31*(1), 87-106.

Marmolejo, G-A. (2014). Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles (tesis de doctorado). Universidad de Salamanca, Salamanca. España.

Marmolejo, G-A. y Vega, M-B. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, *24*(3), 9-34.

Marmolejo, G. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad*. Tesis de magister no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Mesquita, A. (1989). *L´Influence d´aspects figuratifs dans l´argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg. Francia.

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003), Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.

Outhred, L, y Mitchelmore, M. (2004). Students' structuring of rectangular arrays. En M. J. Heines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 28* (Vol 3, pp. 465-472). Bergen. Noruega.

Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young students' intuitive understanding of area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2*)*, 144-167.

Padilla, V (1992). *L´influence d´une acquisition de traitementes purement figuraux pour l´apprentissage des Mathematiques*. Thèse U.L.P. Strasbourg, Francia.

Parra, D., & Toro, I. (2006). Método y conocimiento: metodología de la investigación: Investigación cualitativa/investigación cuantitativa. Medellín: Universidad Eafit.

Pedemonte, B.; Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Study Mathematic*. 76 (3), 281-303.

Pepin, B., Haggarty, L. y Keynes, M. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 33(5), 158-175.

Pokharel, S. and Mutha, A. (2009). Perspectives in Reverse Logistics: A Review. Resource, Conservation and Recycling, 53(4) February, pp. 175-182.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam. Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects, which influence use of visual imagery in high school mathematics. En F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the 15 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 15,* (Vol 3, pp. 191-198). Assisi. Italia.

Presmeg, N. (1986a). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 6(3), 42-46.

Presmeg, N. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics,* 17(3), 297-311.

Ramirez, R. (2012). *De los alumnos con talento matemático. Habilidades de visualización.* Tesis Doctoral No publicada. Universidad de Granada. Granada. España.

Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2008). Middle school children´s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM. The international journal on mathematics education*, 40(1), 65-82.

Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 140-155.

Rock, I. (1985). *La percepción*. Editorial. Prensa Cientifica. Barcelona. España.

Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática*, 15(2), 27-53.

Schmidt, W.H., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, Y., Sawada, T., Valverde, G., Mc Knight, C. Prawat, R., Wiley, D.E., Raizen, S., Britton, E.D. y Wolfe, R.G. (1996). *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*. Dordrecht. Netherlands: Kluwers Academic Publishers.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students´ representations for pictorial growth and change problems. *ZDM. The international journal on mathematics education*, 40(1), 97-110.

Torregosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME*, 10(2), 275-300.

Torregosa, G., Quesada, V. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las ciencias,* 28(3), 327-340.

Vera, O. (2009). Cómo escribir artículos de revisión. *Revista Médica La Paz,* 15(1), pp. 63-69

Walcott, C., Mohr, D. y Kastberg, S.E. (2009). Making sense of shape: analysis of children´s written responses. *Journal of Mathematical Behaviour*, 28(1), 30-40.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171–185.

Yeap, B.H. y Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalisation: à glimpse from a Sinagpure classroom. *ZDM. The international journal on mathematics education,* 40(1), 55-64.

Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? En W. Zimmermann y S, Cunnigham (Eds.) *Visualization in teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7). Estados Unidos: Editorial Board.